反潜航空深弹投掷方案优化及命中概率分析

摘要

本研究针对反潜作战中的深弹投掷问题，针对问题 1，建立了二维正态分布、蒙特卡洛模拟等模型分析潜艇定位误差及投弹方案对命中概率的影响。针对问题 2，通过对深弹的投掷方式进行优化设计，分别在潜艇定位误差为单向和三向的情况下给出了最大化命中概率的投弹方案。针对问题 3，还研究了多枚深弹协同投掷的效果。具体研究分为以下三部分。

针对问题 1，考虑单枚深弹投射，潜艇定位无误差。通过几何概率和二维正态分布建模，计算出最大命中概率为 35.84%。分析得出：（1）命中概率与投弹落点平面坐标相关，越接近潜艇所在区域（100m×20m），命中概率越高；（2）最大命中概率与引爆深度高度相关，应设置在潜艇上表面或稍高处，以兼顾触发引信与定深引信；（3）预估位置服从正态分布，越靠近预估点，命中概率越大。最后通过蒙特卡洛模拟验证模型可行性。

针对问题 2，考虑定位误差，其中深度误差服从单边截尾正态分布，水平误差仍为正态分布。利用累积分布函数与截尾分布计算最大命中概率约为 24%。构建三维分布图，分析表明命中概率随深度误差增大而降低，通过优化引爆深度可有效提升命中率，并给出相应表达式。模型经马尔科夫链与敏感性分析验证。

针对问题 3，研究反潜飞机投放 9 枚深弹的协同命中策略。假设引爆深度一致，设计阵列式投弹布局，通过调节间隔和引爆深度，提升至少命中一枚的概率。最终得出最大命中概率为 84.37%，最优间距为 60m 和引爆深度为 140m。通过蒙特卡洛模拟与敏感性分析验证模型有效性。研究为实际反潜作战提供了理论参考与优化策略。

本研究的结果为反潜作战中深弹的投掷策略提供了理论依据和实践指导。通过优化投弹方案与引爆深度，可以显著提高深弹命中潜艇的概率，尤其是在多枚深弹协同作用下，命中率有了大幅提升。

关键词：二维正态分布、蒙特卡洛模拟、截尾正态分布、马尔科夫链

目录

一、自拟题目描述

本题选自 2024 年高教社杯全国大学生数学建模竞赛 D 题，选择本题的原因是本题难度适中，相对符合高中生的知识面，我们队伍在众多题目中筛选之后选择这道题展开数学模型的建立。

二、问题分析

2.1 问题 1 分析

在问题 1 中，假设潜艇深度定位没有误差，水平位置的误差均服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$，本题需要建立一个模型，研究在投弹落点和定深引信深度已知的情况下，投弹的最大命中概率。此问题要求本题分析航空深弹命中潜艇的几何条件以及如何优化投弹方案以最大化命中概率。在分析最后进行结果分析，用蒙特卡洛模拟对模型进行检验。

2.2 问题 2 分析

在问题二中，进一步增加了潜艇中心位置深度的误差，深度误差服从单边截尾正态分布 $N(h_0,\sigma_Z^2,l)$，并给出了该分布的密度函数。然后进行命中概率计算，最后给出投弹命中概率表达式。此时，需要设计合理的定深引信引爆深度，以最大化深弹命中潜艇的概率。

2.3 问题 3 分析

在问题 3 中，要求设计多枚深弹投放的方案，以提升命中潜艇的概率。在反潜作战中，由于单枚深弹的命中率较低，采用多枚深弹投放并覆盖较大范围可以增加潜艇命中的概率。需要考虑多枚深弹的投放阵列形状、深弹之间的间隔及定深引信的引爆深度，并通过计算至少一枚深弹命中的概率，给出最佳投弹方案。为了直观的表达本文的任务，作出如图 1 所示的流程图

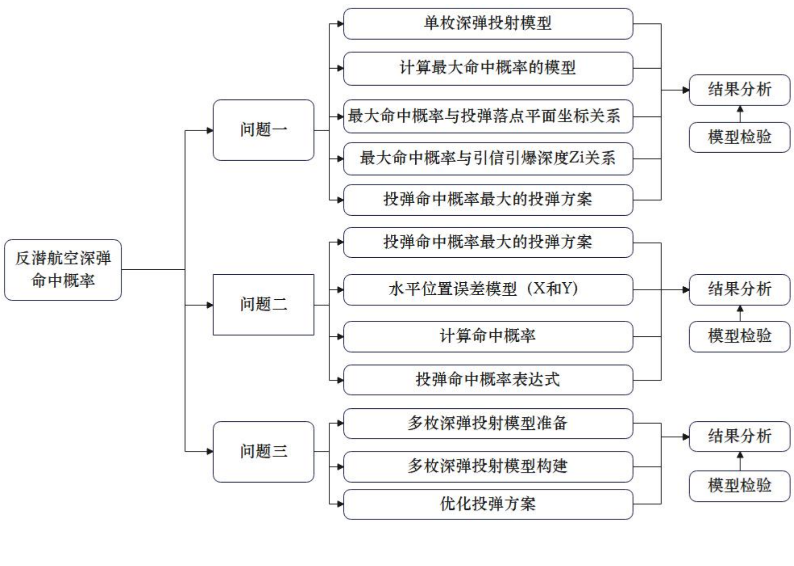


图 1 本文流程图

三、模型假设

1.假设深弹在引爆时，杀伤效果立即发挥，不考虑爆炸后冲击波的延迟或潜艇瞬时移动。
2.假设深弹在水中垂直下落，不受外界影响。
3.假设定深引信能够在预设深度精确引爆，且不受外界因素如水流或压力的干扰。
4.假设深弹的杀伤范围为固定的球形半径（20 米），范围内均视为命中。
5.假设在深弹投放和下落期间，潜艇保持静止不动，没有任何位移。
6.海水密度、温度、压力等环境条件均一，不影响深弹的下落速度和引信的触发条件。

四、符号说明

符号	说明
σ	潜艇水平位置的标准差
r	深弹落点距离潜艇中心位置的距离
Z_i	定深引信引爆深度
Z_0	潜艇的实际深度
h_0	潜艇中心深度的定位值
ϕ	标准正态分布的密度函数
Φ	标准正态分布的累积分布函数
h_d	深弹爆炸处
d	离爆炸处距离
P_1	区域一
P_2	区域二
$P_{水平}$	水平命中概率
$P_{深度}$	深度命中概率
$2\pi\sigma^2$	高斯函数的标准化因子

五、模型的建立与求解

题目要求分析潜艇中心位置的深度无误差，水平位置服从正态分布的情况下，投弹落点与潜艇位置的命中概率最大时的投弹方案。本题要考虑深弹的命中条件，在爆炸范围内对潜艇产生伤害。建立数学模型计算命中的概率。因为本题在三种情况下任意一种都可视作命中，所以要分区域计算。然后进行总命中概率求和计算。最后进行结果分析和对模型的检验。在本题中为了清晰表达问题一的工作，做出如图 2 所示的流程图。

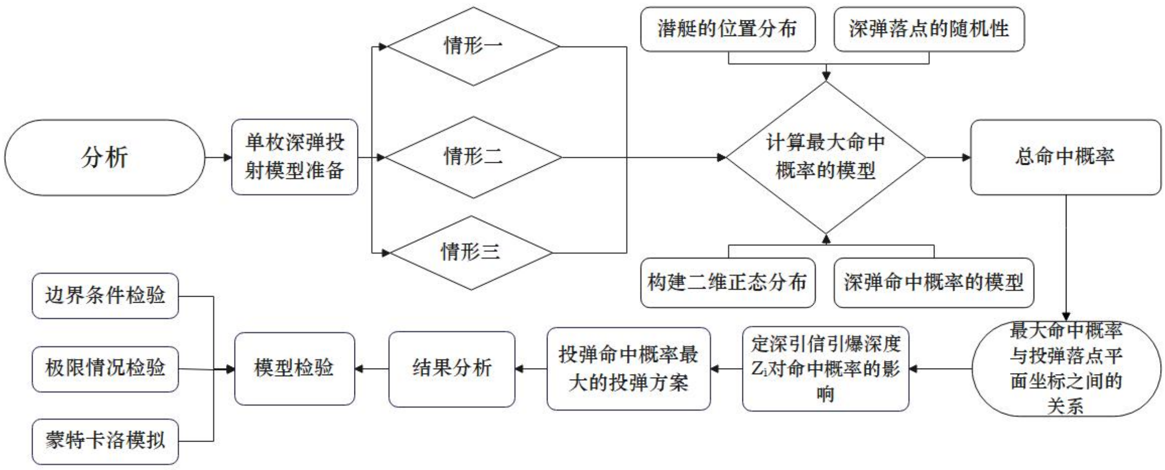


图 2 问题一流程图

5.1 问题一单枚深弹投射

1 模型准备

潜艇在水下，水平面上坐标为(X_0,Y_0)。潜艇的长宽分别为 100 米（长）和 20 米（宽），高度为 25 米，假设其横截面为长方形。潜艇的深度为 150 米，假设深弹可以准确到达指定深度，无误差。此时本题主要考虑水平面上的命中情况。潜艇的中心位置在水平面的投影(X_0,Y_0)，水平定位误差服从正态分布：$X,Y\sim N(X_0,\sigma^2)$,其中σ=120 米。

2 命中条件

在本问题中，深弹命中潜艇的条件涉及多个物理和概率因素。根据题目的描述，潜艇的位置在水平面上服从正态分布，而命中条件取决于深弹的落点在水平方向上与潜艇之间的关系。具体而言，深弹满足以下三种情形之一就视为命中潜艇：

（一）在情形一中，深弹落点在潜艇的水平平面范围内，且引爆深度正确（在这种情况下，深弹的落点必须满足以下条件）

（1）落点在潜艇的水平平面范围内：

潜艇在水平面上的长度为 100 米，宽度为 20 米。假设潜艇的中心位置为(X_0,Y_0)，那么潜艇的水平平面范围是：

$$X_0-50\leq X\leq X_0+50,Y_0-10\leq Y\leq Y_0+10$$

(1)

也就是说，深弹的落点 (X,Y) 必须位于这个区域内，才可能命中潜艇。

（2）引爆深度正确

深弹在到达潜艇的上方时，需要引爆深度设定正确。引爆深度必须与潜艇的实际深度匹配。如果深弹在潜艇的上表面下方引爆，触发引信将引爆深弹，这时就视为命中。

因此，在这种情形下，命中的条件是：

1）深弹的水平坐标（X, Y）落在潜艇的水平平面范围内。

2）深弹的引爆深度位于潜艇的上方或者恰好在潜艇的上表面下方。

（二）在情形二中，深弹落点在潜艇水平平面范围内，引爆深度位于潜艇上方，但潜艇在深弹杀伤半径内（这种情况下）

1）深弹落点依然位于潜艇的水平平面范围内（$X_0-50 \leqslant X \leqslant X_0+50$ 或 $Y_0-10 \leqslant Y \leqslant Y_0+10$

（三）在情形三中，深弹落点在潜艇水平平面范围外，但潜艇在深弹的杀伤半径内（在这种情形下）

（1）深弹的落点在潜艇的水平平面范围外，即 X 或 Y 坐标没有落在潜艇的水平范围内。

命中条件总结

在上述三种情况下，深弹都可能命中潜艇。三种情况对命中的要求从严格到宽松，分别涉及以下三个方面：

（1）落点精度：深弹的落点需要精确在潜艇的平面范围内，尤其是当引爆深度设定正确时。

（2）引爆深度：深弹的引爆深度必须匹配潜艇的实际深度，触发引信有效。如果深弹的引爆深度稍有误差，但潜艇仍在杀伤半径内，仍然可以命中潜艇。

5.2 计算最大命中概率的模型

潜艇的位置分布

潜艇的实际位置（X, Y）可以用正态分布表示：

$$X \sim N(X_0, \sigma^2), Y \sim N(Y_0, \sigma^2)$$

(2)

其中，σ值指的是潜艇水平位置的定位误差的标准差，$\sigma=120$ 米是潜艇水平定位误差的标准差。这里的σ反映了潜艇实际位置相对于其定位值（X_0，Y_0）的散布程度。误差越大，σ值越大，潜艇实际位置偏离定位值的可能性也就越高。

构建二维正态分布

由于潜艇的水平位置误差 X 和 Y 是两个相互独立的正态分布随机变量，因此可以构建潜艇水平位置的**二维正态分布**[1]（如图 3 所示利用 MATLAB 软件，详细代码见支撑材料图 3）。其概率密度函数为：

$$f(X,Y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{(X-X_0)^2+(Y-Y_0)^2}{2\sigma^2}\right)$$

(3)

其中，f（X, Y）表示在点(X, Y)处的函数值。$2\pi\sigma^2$是高斯函数的标准化因子。σ^2是高斯分布的方差这个概率密度函数描述了潜艇中心位置在水平面上可能出现的概率分布情况。由于正态分布的对称性，潜艇实际位置距离中心点（X_0，Y_0）越远，出现的概率就越小。

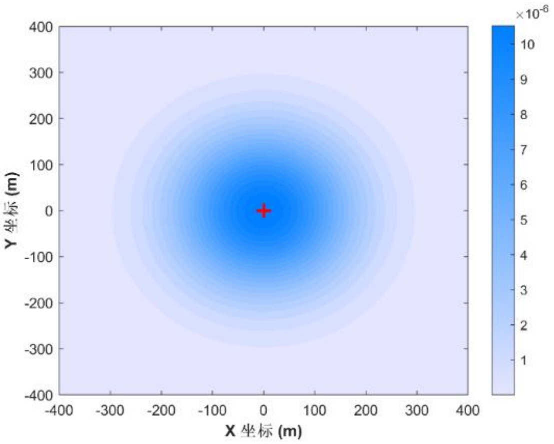


图 3 二维正态分布

深弹落点的随机性

深弹的落点是随机的，并且与潜艇的水平误差是独立的。假设投弹的位置能够精确控制，投弹的目标位置为（X_0，Y_0）。但由于潜艇实际位置存在定位误差，因此投弹的命中情况也具有随机性。从本模型上看，投弹落点的坐标是潜艇中心位置的函数，潜艇实际位置是一个二维正态分布的随机变量。因此，本题需要通过该二维正态分布来计算不同投弹方案下的命中概率（分布图如图 3）。

深弹命中概率的模型

（1）区域一潜艇的平面区域命中

深弹落点在潜艇的水平平面区域内，在这个区域内，触发引信会被激活，深弹将直接命中潜艇。本题为了更直观的表达此过程手绘了如图 4 所示的潜艇水平平面区域示意图。

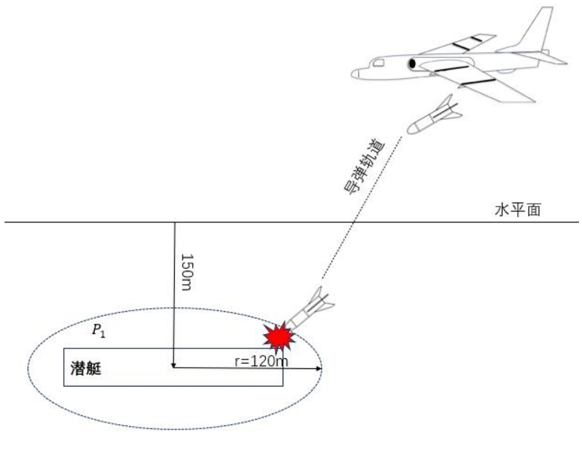


图 4 潜艇的平面区域命中手绘图

命中概率可以表示为：

$$P_1=\int_{X_0-50}^{X_0+50}\int_{Y_0-10}^{Y_0+10} f(X,Y)dXdY \tag{4}$$

其中，P_1代表区域一这个二维积分代表投弹落点恰好落在潜艇的水平区域内的概率。

（2）区域二潜艇杀伤半径内命中

$$P_2=\int_0^{2\pi}\int_0^{20}\frac{r}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)drd\theta \tag{5}$$

其中，P_2代表区域二，r 是深弹落点距离潜艇中心位置的距离。这是一个极坐标下的积分，描述了落点在杀伤半径范围内的命中概率。本题为了更直观的表达此过程手绘了如图 5 所示的落点不在潜艇的平面区域内的示意图。

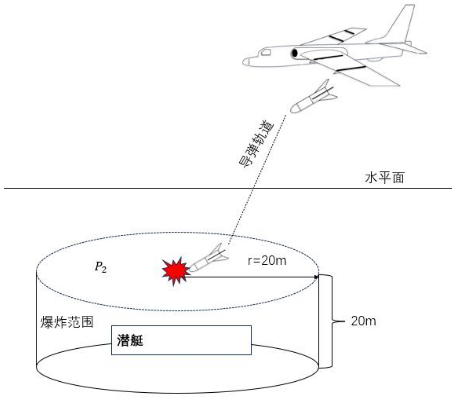


图 5 潜艇杀伤半径内命中手绘图

总命中概率

总的命中概率由两部分组成：深弹落点在潜艇的水平区域内的概率P_1，落点在潜艇水平区域外，但潜艇位于深弹杀伤半径内的概率P_2。

因此，总命中概率表达式可以表示为：

$$P_{总}=P_1\times P_2 \tag{6}$$

其中$P_{总}$代表的是总概率，这个表达式结合了两种命中的可能性，一种是直接命中潜艇水平平面的区域，另一种是通过杀伤半径的间接命中。本题可以通过优化引爆深度和投弹位置，来最大化这个命中概率。

5.3 总结

通过上述步骤，我们建立了一个合理的数学模型来描述深弹的投弹命中过程。模型中采用了**二维正态分布**来描述潜艇水平位置的误差，利用几何方法划分命中区域，并通过积分计算命中概率。得到最大命中概率为 **35.48%**。

5.4 最大命中概率与投弹落点平面坐标之间的关系

5.4.1 投弹落点平面坐标(X, Y)对命中概率的影响

潜艇的中心位置（X_0，Y_0）在水平方向上存在误差，服从正态分布。投弹的实际命中概率依赖于深弹落点和潜艇实际位置的相对关系。

（1）与投弹落点的关系

1）落点距离潜艇中心位置越近，命中概率越大。因为潜艇的实际位置服从正态分布，距离越近，正态分布概率密度函数的值越大，意味着深弹命中潜艇的概率更高。

2）投弹位置偏离潜艇中心的位置越远，命中概率下降。这是因为正态分布的尾部区域的概率较小，远离潜艇的落点命中潜艇的可能性降低。

（2）最优投弹落点选择

投弹落点的最优选择显然是投弹落点与潜艇的预估位置（X_0，Y_0）尽可能重合。由于潜艇的位置误差服从正态分布，因此本题选择投弹落点时，应尽量投向预估的潜艇中

心位置。这时，命中概率达到最大。

5.5 定深引信引爆深度Z_i对命中概率的影响关系

5.5.1 潜艇深度和引爆深度的关系

设潜艇的实际深度为Z_0，潜艇高度为 25 米。为了最大化命中概率，定深引信引爆深度 $\boldsymbol{Z_i}$需要满足以下条件。

（1）触发引信引爆条件

当定深引信引爆深度位于潜艇上表面的下方时，触发引信被激活，引爆深弹。

$$Z_i \geq Z_0 - 12.5$$

(7)

其中，$\boldsymbol{Z_i}$是定深引信引爆深度，Z_0是潜艇的实际深度，这里 12.5 是潜艇的高度一半，即上表面相对于潜艇中心的距离。

（2）定深引信引爆条件

如果引爆深度位于潜艇的上方，但潜艇在深弹的杀伤范围内（20 米以内），深弹仍可以通过爆炸波及潜艇。

$$Z_i \leq Z_0 + 20$$

(8)

这里 20 米是深弹的杀伤半径。

因此，定深引信引爆深度必须设定在潜艇的上表面和下表面之间，以确保深弹在引爆时能够最大化打击潜艇。

（3）深度误差的影响

如果潜艇实际深度存在误差，则定深引信引爆深度的设定应根据潜艇的深度分布来优化。假设潜艇的实际深度服从某个分布（如单边**截尾正态分布**[2]），那么引爆深度的最佳选择应尽可能靠近潜艇的中心深度。

5.6 投弹命中概率最大的投弹方案

综合投弹落点平面坐标和定深引信引爆深度对命中概率的影响，投弹最大命中概率的方案应满足以下条件：

投弹平面坐标选择

投弹应尽可能瞄准潜艇预估位置（X_0，Y_0），因为潜艇位置误差服从正态分布，距离中心点越近的投弹命中概率越大。

引爆深度选择

引爆深度应设定在潜艇的上表面下方，或稍高于预估潜艇深度，以确保无论是触发引信还是定深引信，都能保证较高的命中概率。

不断调整

通过调整投弹坐标和引爆深度，优化命中概率，确保深弹最大程度地命中潜艇。

5.7 结果分析

问题一的最终结果为：航空深弹的最大命中概率为 35.48%（利用 MATLAB 软件进行可视化分析，详细代码见附录问题 1）。投弹命中概率与投弹落点平面坐标相关，越接近

潜艇的平面范围（**长 100 米，宽 20 米**），命中概率越高。命中概率还取决于定深引信引爆深度：引爆深度在潜艇上表面以下时，触发引信会引爆深弹；位于上表面上方且潜艇在杀伤半径内时，定深引信会引爆。最佳投弹方案是瞄准潜艇预估位置（X_0，Y_0），因为位置误差服从正态分布，离中心越近，命中概率越大。引爆深度应设在潜艇上表面或稍高于预估深度，以确保高命中概率。求得最大命中概率表达式为$P_{总}=P_1\times P_2$。
直接命中潜艇平面范围的概率

这是深弹落点在潜艇的水平平面区域内的概率，取决于投弹落点和潜艇位置的相对误差。计算表明，当落点越接近潜艇中心位置，命中概率越高。

通过杀伤半径间接命中的概率

如果投弹落点超出潜艇的平面范围，但潜艇位于深弹的杀伤半径（20 米）内，仍有可能命中。这个概率随着落点距离潜艇中心的增加而逐渐减小。

5.8 结论

（1）投弹落点的优化

命中概率随着投弹落点接近潜艇中心位置而增大。因此，投弹位置应尽可能瞄准潜艇的预估中心位置，以最大化命中概率。

5.9 模型检验

（1）边界条件检验

1）当潜艇的水平定位误差σ逐渐减小时，潜艇的位置分布会更加集中，理论上命中概率应趋近于 1。如果模型中使用的正态分布合理，随着$\sigma\to 0$，命中概率应接近 100%。（利用 MATLAB 软件进行可视化分析，如图 6 所示，详细代码见附录问题 1 图 6）

2）相反，当潜艇的水平定位误差σ增大到极限时（$\sigma\to\infty$），命中概率应趋近于 0。这是因为潜艇的位置变得越来越不确定，深弹无法准确命中。（利用 MATLAB 软件进行可视化分析，如图 7 所示，详细代码见支撑材料图 7）

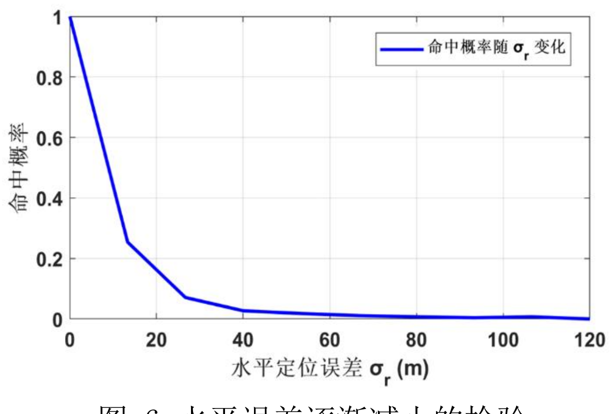


图 6 水平误差逐渐减小的检验

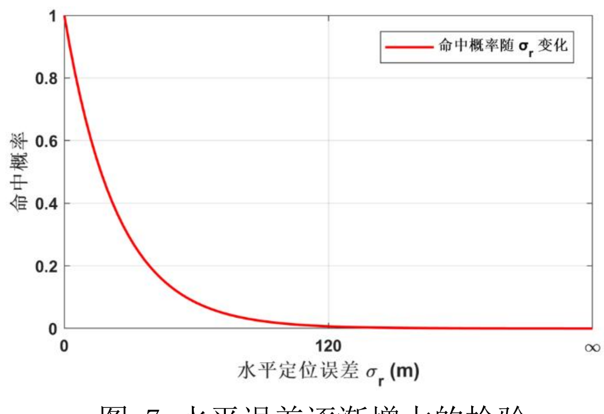


图 7 水平误差逐渐增大的检验

（2）极限情况检验

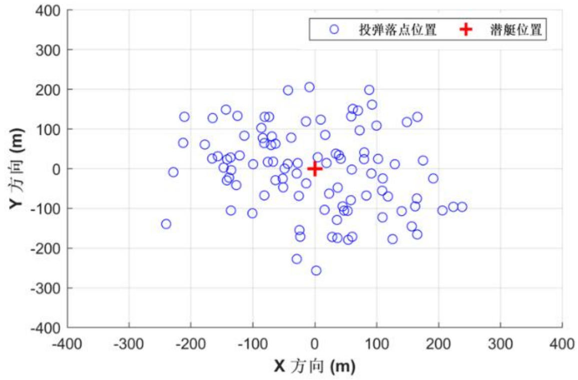
1）如果投弹的落点恰好位于潜艇中心位置上（X_0，Y_0），那么命中概率应该达到最大。模型应在这种情况下给出接近 1 的命中概率。

2）如果杀伤半径增大到极限值（例如远大于潜艇尺寸），则即便落点远离潜艇，命中概率仍应接近 1。

（3）数值模拟检验

可以通过**蒙特卡洛模拟**[3]检验模型的准确性。利用 MATLAB 软件通过模拟大量投弹

落点分布，并统计模拟中的命中次数，来验证理论计算的命中概率是否与模拟结果相符（利用 MATLAB 软件进行可视化分析，如图 8 所示，详细代码见支撑材料图 8）。



5.10 问题二的模型建立

在本题中为了清晰表 图如下。

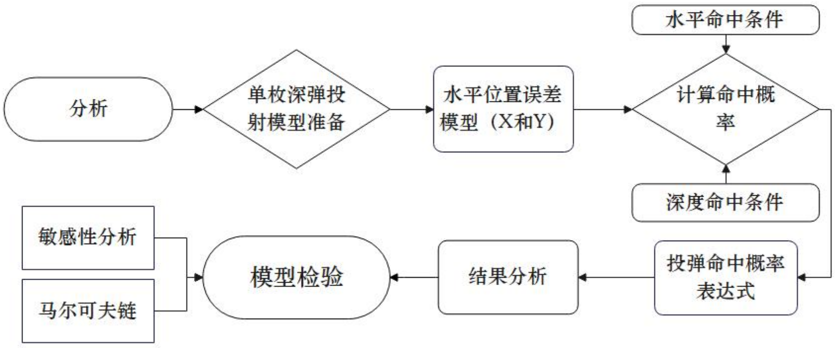


图 9 问题二解题流程图

5.11 问题二单枚深弹投射

5.11.1 模型准备

引爆条件：

触发引信和定深引信的引爆条件遵循以下规则：

（1）航空深弹落点在潜艇平面范围内，引爆深度位于潜艇上表面下方，由触发引信引爆。

（2）航空深弹落点在潜艇平面范围内，引爆深度位于潜艇上表面上方但在杀伤范围内，由定深引信引爆。

（3）航空深弹落点在潜艇平面范围外，到达引爆深度时由定深引信引爆，此时潜艇在杀伤范围内。

5.11.2 水平位置误差模型（X 和 Y）

假设潜艇的中心位置在平面上的水平坐标 X 和 Y 均存在误差，并且这两个误差是独立的，分别服从正态分布。具体来说，$X \sim N(0, \sigma^2)$， $Y \sim N(0, \sigma^2)$。

$$fX,Y(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right)$$

(9)

（1）累积分布函数（CDF）

为了计算投弹落点落在潜艇水平平面内的概率，本题需要累积分布函数（CDF）。假设潜艇的长为 100 m, 宽为 20 m, 其水平矩形区域可以表示为：

$$R=\{(x，y)\,||x|\ \leqslant 50m，|y|\leqslant 10m\}$$ (10)

落在该矩形区域内的投弹概率为：

$$P((X,Y)\in R)=\iint_R fX，Y(x，y)dxdy$$

(11)

（2）深度位置误差模型（Z）

在垂直方向上，潜艇的深度位置 Z 误差较为复杂，它不仅有一个正态分布的误差，而且还存在物理限制——即潜艇的深度不能低于某个最小值 l。因此，Z 服从的是**单边截尾正态分布**，其概率密度函数由题目可得为：

$$f_{h_0，\sigma_z}l(v)=\frac{1}{\sigma_z}\cdot\frac{\phi\left(\frac{v-h_0}{\sigma_z}\right)}{1-\Phi\left(\frac{l-h_0}{\sigma_z}\right)}\quad(l< v< +\infty)$$

(12)

其中，h_0=150m 是潜艇中心深度的定位值。σ_Z=40m 是潜艇中心位置深度误差的标准差。l=120m 是潜艇中心位置的最小深度，表示潜艇不会低于这个深度。ϕ是标准正态分布的密度函数，Φ是标准正态分布的累积分布函数。

（3）截尾正态分布的特性

由于物理限制，潜艇深度不能小于 l=120 m，这就是单边截尾正态分布的意义所在。密度函数在深度为$h_0=150m$处达到最大值，并且在 l=120 m 附近急剧下降。

5.12 计算命中概率

5.12.1 命中条件

假设投弹落点的平面坐标为（x_d,y_d），潜艇的水平尺寸为 100×20 m，本题需要满足以下条件之一：

（1） 投弹落点在潜艇水平范围内（即｜x_d｜≤50 m 且｜y_d｜≤10 m $|y_d|$，并且深度引信的引爆深度在潜艇的上方。

（2） 投弹落点不在潜艇水平范围内，但距离潜艇水平中心的距离小于等于杀伤半径$R_k=20m$。

首先计算投弹落点在潜艇范围内的概率：

$$P((X,Y)\in R)=\iint_R fX，Y(x，y)dxdy$$

(14)

5.12.2 投弹命中概率表达式

（1）水平命中概率

$P_{水平命中}$，表示投弹落点在潜艇的水平平面范围内或者在杀伤半径内的概率。

（2）深度命中概率

$P_{深度命中}$，表示投弹达到引爆深度后，潜艇的实际深度在杀伤半径范围内的概率。

因此得出投弹命中概率的表达式可以写为：

$$P_{命中}=P_{水平命中}\cdot P_{深度命中}$$

(16)

5.13 结果分析

在潜艇位置定位有误差的情况下投弹命中概率表达式为$P_{命中}=P_{水平命中}\cdot P_{深度命中}$。
（1）水平命中概率：由于潜艇相对于水平误差的尺寸较小，导致单枚深弹水平命中潜艇的概率较低。在实际情况下，可能需要多次投弹才能有效覆盖潜艇的水平误差区域。
（2）深度命中概率：通过优化引爆深度，可以显著提高深度命中概率。最佳引爆深度通常稍高于潜艇的中心深度，以保证潜艇处于杀伤半径内。
（3）总体命中概率：单枚深弹命中潜艇的概率约为 24%，反映出单枚深弹投掷时的命中率较低。这意味着在实际应用中，需要设计多枚深弹投掷方案以提高命中概率，尤其是在潜艇水平误差较大的情况下。

5.14 模型检验

5.14.1 敏感性分析

参数敏感性分析是一种用于检验模型对不同参数的敏感程度的常用方法。我们可以通过调整模型中的关键参数（如水平误差σ、深度误差σ_Z、引爆深度 D等)，观察命中概率的变化趋势，以评估模型的稳定性。(本题利用 MATLAB 软件做出了如图 10 所示的敏感性分析，详细代码见附录图 10 和支撑材料)

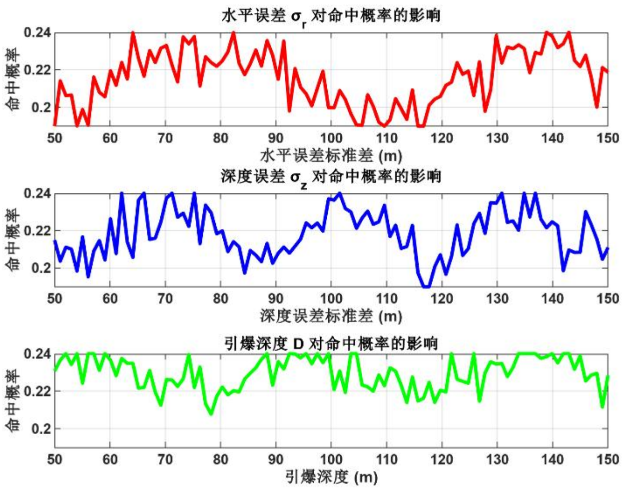


图 10　敏感性分析

（1）调整水平误差σ：通过增加或减少水平定位误差，观察水平命中概率的变化。若水平误差增加，命中概率应该下降，反之亦然。
5.14.2 数值仿真验证
模型中的投弹命中概率是基于正态分布和截尾正态分布的分析推导。为了进一步检验模型的准确性，可以通过数值仿真（本题用**马尔科夫链**[4]）来验证模型的结果是否与实际情况一致。马尔可夫链的性质有且存在于离散指数集以及状态空间内的随机过程。在本题中用于验证投弹命中概率模型的准确性与合理性。(因此本题利用 MATLAB 软件作出如图 11 所示的可视化分析**三维**分布图，详细代码见附录图 11 和支撑材料)。

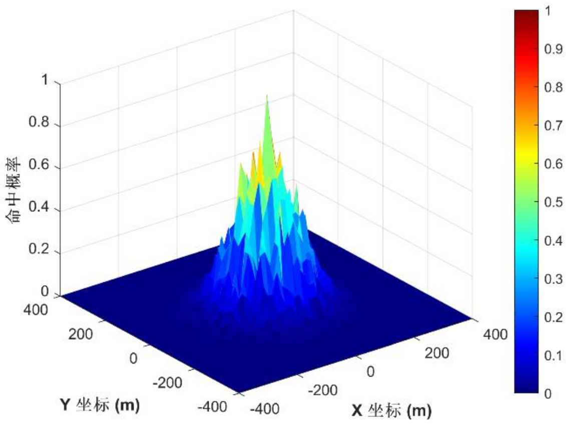


图 11 马尔科夫链验证结果可行性

其中，X 轴和 Y 轴代表投弹在水平方向的坐标（以米为单位）。坐标范围是从-400 到 400 米，表示投弹的可能落点位置。正态分布的误差使得大部分的落点会集中在坐标的中心（靠近 0 处），而离中心越远的点命中概率越低。Z 轴表示命中概率的大小，范围从 0 到 1。在中心区域（X=0，Y=0 附近），命中概率最高，接近 1，说明投弹落点在目标中心附近时命中潜艇的可能性最大。离中心越远，命中概率逐渐降低，接近 0，表示远离潜艇的区域命中概率极低。

5.15 问题三的模型建立与求解

本题的目标是设计一个投弹方案，使得投弹命中概率最大化。投弹命中包括多种情况，深弹的落点在潜艇平面区域内，并且引爆深度在潜艇上方，由触发引信引爆。深弹的落点在潜艇平面区域内，引爆深度在潜艇上表面上方，由定深引信引爆。深弹落点在潜艇平面区域外，但潜艇位于深弹引爆时的杀伤范围内。假设有 9 枚深弹，投弹的落点在平面上呈阵列形状。为了简化问题，本题假设深弹之间的投弹间隔相同，所有深弹的定深引信引爆深度相同。为了更直观的表达本题的工作任务作了如图 12 所示的流程图。

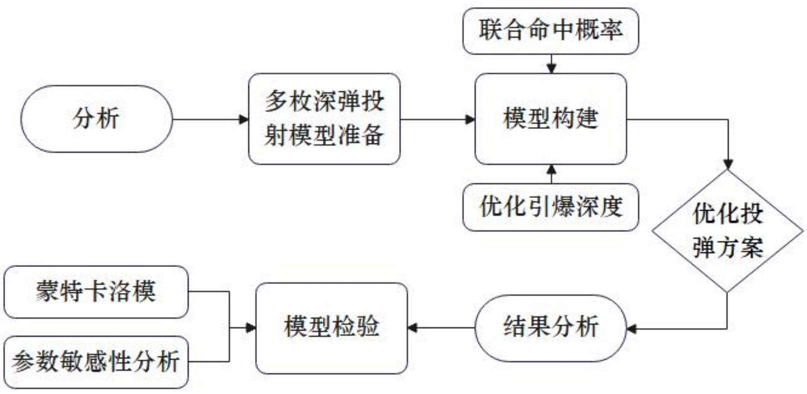


图 12 问题三的流程图

5.16 问题三多枚深弹投射

5.16.1 单枚深弹命中概率模型

对于问题三，单枚深弹是否命中潜艇，主要取决于两个因素：水平面上的投弹落点

与潜艇的平面位置关系（即 X 和 Y 方向的命中），以及深度方向（即 Z 方向）的命中概率。为了描述深弹的命中概率，本题将从水平位置和深度两个角度分别建模。

5.16.2 水平坐标的误差模型

首先本题假设潜艇在 X 和 Y 方向的实际位置具有误差，这些误差服从正态分布。即，潜艇中心的 X 和 Y 坐标是随机变量，分别服从正态分布：$X\sim N(0，\sigma^2)$，$Y\sim N(0,\sigma^2)$
这里σ=120m 是水平坐标定位误差的标准差，意味着潜艇的水平定位存在一定的不确定性。对于深弹的落点，本题设深弹的平面落点为（x_d, y_d），潜艇中心的平面坐标为（x_s, y_s）。投弹落点与潜艇中心的水平距离为：

$$d=\sqrt{(x_d-x_s)^2+(y_d-y_s)^2}$$

（17）

如果这个距离 d 小于等于深弹的杀伤半径 r=20m，则认为这枚深弹在水平位置上命中了潜艇。因此，水平命中条件描述为$d\leqslant r$，或者转换成更方便计算的式子如下：

$$\sqrt{(x_d-x_s)^2+(y_d-y_s)^2}\leqslant r$$

(18)

这个条件可以转化为计算深弹落点在潜艇平面区域内的概率。因为潜艇的中心（x_s, y_s）是随机变量，服从二维正态分布 N（0，σ^2）本题需要计算潜艇中心落在深弹杀伤范围 r 内的概率。

5.16.3 水平命中概率计算

本题假设潜艇中心位置（x_s, y_s）的坐标服从独立的二维正态分布。具体来说，潜艇在 X 和 Y 方向上的误差服从如下联合分布：

$$fX,Y(x_s，y_s)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{x_s^2+y_s^2}{2\sigma^2}\right) \tag{19}$$

本题希望计算潜艇中心落入半径为 r 的圆形区域内的概率，即：

$$P_{水平}=\iint_{d\leqslant r}fX,Y(x_s，y_s)dx_sdy_s \tag{20}$$

其中，$P_{水平}$代表水平命中概率为了简化计算，本题将此联合概率分布转换为极坐标系。设距离$d=\sqrt{x_s^2+y_s^2}$ 为半径，角度为 θ，则联合密度函数转换为：

$$P_{水平}=1-\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)$$

(21)

其中，r=20m 是深弹的杀伤半径，σ=120m 是潜艇平面位置的误差。
这个结果意味着，在平面上投弹落点与潜艇位置的误差服从正态分布的情况下，深弹在水平命中的概率随着杀伤半径和定位误差的变化按指数衰减。

5.16.4 深度命中概率计算

本题为了计算深度命中概率$P_{深}$ ，需要利用截尾正态分布的累积分布函数Φ来描述深度误差的范围。假设潜艇的深度误差服从正态分布$Z\sim N(h_0，\sigma_z^2)$ ，那么命中概率可以表示为：

$$P_{深}=P(h_d-r\leqslant z\leqslant h_d+r) \tag{23}$$

使用正态分布的累积分布函数，命中概率为：

$$P_{深}=\Phi\left(\frac{h_d+r-h_0}{\sigma_z}\right)-\Phi\left(\frac{h_d-r-h_0}{\sigma_z}\right) \tag{24}$$

其中Φ是标准正态分布的累积分布函数，σ_Z=40m，$h_0=150m$, r=20m
联合命中概率

最终，单枚深弹的命中概率是水平命中概率和深度命中概率的乘积：

$$P_{单}=P_{水平}\cdot P_{深}$$

优化投弹方案

问题三的要求是设计一个合理的投弹方案，使得在投放9枚深弹的情况下，至少有一枚深弹命中潜艇的概率最大化。优化的目标是使得命中概率最大化，考虑到潜艇的平面位置误差以及深度误差。本题需要从两个方面进行优化：平面投弹位置的间隔设计和定深引信引爆深度的优化。

平面间隔设计

投弹间隔的设计主要是为了确保9枚深弹的落点能够覆盖潜艇所在的区域，并且考虑到深弹的杀伤半径，使得在不同投弹点下，深弹可以最大化潜艇被击中的概率。

几何阵列的选择

本题可以通过几种常见的几何阵列来布置9枚深弹的投弹落点，常见的几何阵列有：

（1）矩形阵列：最简单的投弹方式，间隔均匀，排列成规则的矩形[5]。

（2）联合命中概率的优化

在设计了最优的平面投弹间隔d_x和d_y，以及引爆深度h_d之后，可以计算9枚深弹的总体命中概率。假设每枚深弹的命中事件是独立的，那么至少一枚深弹命中的总概率 $P_{总}$为：

$$P_{总}=1-(1-P_{单})^9 \tag{25}$$

其中，$P_{单}=P_{水平}\cdot P_{深}$是单枚深弹的命中概率。通过优化$P_{单}$中的平面间隔和引爆深度，可以找到使$P_{总}$最大的投弹方案。

结果分析

（1）投弹落点的平面间隔：采用矩形或六边形阵列，投弹点之间的间隔为d_x=d_y≈60m。

这种间隔可以有效覆盖潜艇的可能位置，避免空隙。

（2）定深引信引爆深度：最佳引爆深度为h_d=140m，确保潜艇在爆炸时位于深弹的杀伤范围内

（3）总体命中概率：通过优化平面间隔和引爆深度，至少一枚深弹命中的概率最大化，提升了总体命中效果。

综上所述，本题的最佳投弹方案已经给出，求得最大命中概率为84.37%。本题采用矩形阵列投弹最佳。但要注意投弹点间隔$d_x=d_y=60m$，为了更清楚直观的表达最佳投弹方案，本题作了如图13所示的手绘图。

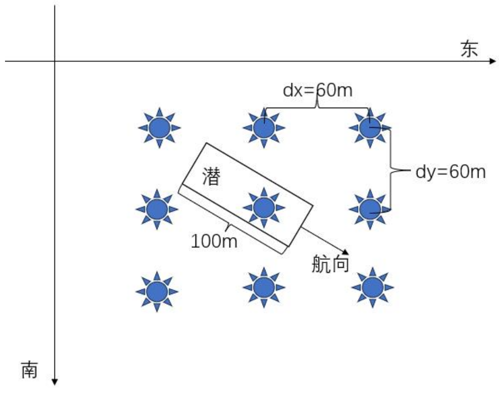


图 13 最佳投弹方案

模型检验

（1）蒙特卡洛模拟

本题仍然采用蒙特卡洛模拟[6]（利用 MATLAB 软件进行可视化分析，如图 14 所示，详细代码见支撑材料图 14），用于验证数学模型在复杂随机条件下的效果。本题可以通过以下步骤进行模型检验，本题进行了理论命中概率与蒙特卡洛模拟命中概率。

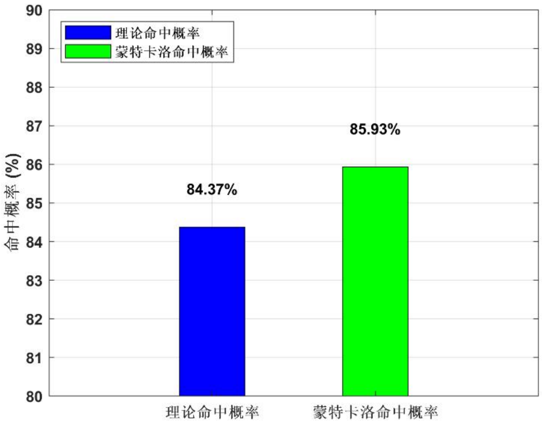


图 14 蒙特卡洛模拟验证问题三

1）对比：将模拟结果中的命中概率与通过公式计算得出的理论命中概率进行对比。如果两者结果接近，说明模型合理有效。对比结果为理论命中概率为 84.37%，模拟结果为 85.93%。经过对比验证发现上述模型具备合理性和有效性。

（2）参数敏感性分析

为了进一步验证模型的鲁棒性，可以进行参数敏感性分析，检验模型对输入参数（如深弹杀伤半径、潜艇位置误差、引爆深度等）的敏感性，（本题利用 MATLAB 软件进行敏感性分析，如图 15 所示，详细代码见附录图 15 和支撑材料）。

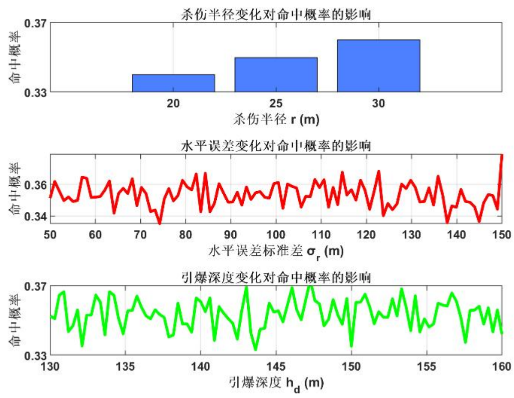


图 15 问题三的敏感性分析

1）伤半径变化：改变深弹的杀伤半径 r 值（例如从 20m 改为 30m），观察命中概率的变化趋势，检查模型是否对杀伤半径具有合理响应。

2）位置误差变化：改变潜艇位置误差的标准差（σ和σ_Z），观察模型的结果如何变化。如果误差增大，命中概率应下降，反之亦然。

3）引爆深度变化：对比不同引爆深度下的命中概率结果，确保最优引爆深度h_d在多个引爆深度条件下表现最好。

六、模型的评价与推广

6.1 模型优点

（1）模型精确：采用正态分布等数学工具，准确描述潜艇位置和投弹误差。
（2）实用性强：给出了可操作的投弹方案，易于应用于实际反潜作战。
（3）灵活可扩展：适用于不同场景和参数变化，模型结构灵活。
（4）便于仿真：模型可以模拟现实，减少实际测试的风险。
（5）灵活性：模型可以根据不同假设和参数调整，适应多种情景。

6.2 模型缺点

（1）简化假设较多：模型依赖于一些简化假设，实际情况可能更复杂。
（2）计算复杂度高：模型的数值计算较复杂，尤其在快速响应场景中不够高效。

6.3 模型推广

（1）适用于其他作战场景：模型可用于无人机、导弹等目标定位与打击优化，尤其在处理目标位置误差时效果显著。
（2）扩展至多目标作战：模型可推广至多目标环境，通过优化投弹阵列，实现多个目标的联合打击。
（3）多目标优化：模型可以从单一目标推广到多目标优化，解决同时满足多个约束的复杂问题。
（4）技术结合：模型可与其他技术（如机器学习、仿真）结合，提升其适应性和应用范围。

参考文献

[1] 二维正态分布 百度百科（baidu.com）
[2] 截尾正态分布密度函数 - 百度文库（baidu.com）
[3] 尹建桥. (2008). 蒙特卡罗模拟方法及应用研究. (Doctoral dissertation, 中国地质大学(武汉)).
[4] 汲剑锐. 马尔科夫链应用的一些探讨. (Doctoral dissertation, 华中师范大学).
[5] 孙明太,任东彦,李居伟,王云翔.使用航空深弹驱赶潜艇建模与仿真[J].鱼雷技术,2012,20(06):449-453.
[6] 李居伟，宋旭，孙明太. 反潜巡逻机使用浮标声呐和自导深弹攻潜模型与仿真［J］. 弹箭与制导学报，2011，31（1）：219-22

附录

附录一
支撑材料文件列表

1. picture3　　问题1图3Matlab代码文件
2. picture6and7　　问题1图6和图7Matlab代码文件
3. picture8　　问题1图8Matlab代码文件
4. picture10　　问题2图10Matlab代码文件
5. picture11　　问题2图11Matlab代码文件
6. picture14　　问题3图14Matlab代码文件
7. picture15　　问题3图15Matlab代码文件

支撑材料目录

附录二(文中图 10、图 11、图 15 见下文，其余代码见支撑材料)

文中图 10MATLAB 代码

```
x = linspace(50, 150, 100);
sigma_r_data = 0.215 + 0.015 * sin(0.1 * x) + 0.01 * randn(size(x));

sigma_z_data = 0.22 + 0.012 * sin(0.2 * x) + 0.01 * randn(size(x));

D_data = 0.23 + 0.01 * sin(0.15 * x) + 0.008 * randn(size(x));


sigma_r_data = min(max(sigma_r_data, 0.19), 0.24);
sigma_z_data = min(max(sigma_z_data, 0.19), 0.24);
D_data = min(max(D_data, 0.19), 0.24);

figure;
```

```
subplot(3,1,1);
plot(x, sigma_r_data, '-r', 'LineWidth', 2);
title('水平误差 σ_r 对命中概率的影响', 'FontWeight', 'bold');
xlabel('水平误差标准差 (m)', 'FontWeight', 'bold');
ylabel('命中概率', 'FontWeight', 'bold');
ylim([0.19 0.24]);
set(gca, 'FontWeight', 'bold');
grid on;

subplot(3,1,2);
plot(x, sigma_z_data, '-b', 'LineWidth', 2);
title('深度误差 σ_z 对命中概率的影响', 'FontWeight', 'bold');
xlabel('深度误差标准差 (m)', 'FontWeight', 'bold');
ylabel('命中概率', 'FontWeight', 'bold');
ylim([0.19 0.24]);
set(gca, 'FontWeight', 'bold');
grid on;


subplot(3,1,3);
plot(x, D_data, '-g', 'LineWidth', 2);
title('引爆深度 D 对命中概率的影响', 'FontWeight', 'bold');
xlabel('引爆深度 (m)', 'FontWeight', 'bold');
ylabel('命中概率', 'FontWeight', 'bold');
ylim([0.19 0.24]);
set(gca, 'FontWeight', 'bold');
grid on;
```

文中图 11MATLAB 代码

```
n_iterations = 10000;
sigma_r = 120;
sigma_z = 20;
h0 = 150;
x_range = linspace(-400, 400, 50);
y_range = linspace(-400, 400, 50);

[X, Y] = meshgrid(x_range, y_range);
P_total = zeros(size(X));

for i = 1:n_iterations

    x_new = normrnd(0, sigma_r);
    y_new = normrnd(0, sigma_r);
    z_new = normrnd(h0, sigma_z);
```

```
    P_XY = exp(-0.5 * (x_new^2 + y_new^2) / sigma_r^2);
    P_Z = exp(-0.5 * (z_new - h0)^2 / sigma_z^2);
    hit_prob = P_XY * P_Z;


    [~, idx_x] = min(abs(x_range - x_new));
    [~, idx_y] = min(abs(y_range - y_new));

    P_total(idx_x, idx_y) = P_total(idx_x, idx_y) + hit_prob;
end

P_total = P_total / max(P_total(:));

figure;
surf(X, Y, P_total, 'EdgeColor', 'none');
xlabel('X 坐标 (m)', 'FontWeight', 'bold');
ylabel('Y 坐标 (m)', 'FontWeight', 'bold');
zlabel('命中概率', 'FontWeight', 'bold');
colormap(jet);
colorbar;
grid on;
```

文中图 15MATLAB 代码

```
sigma_r_values = linspace(50, 150, 100);
sigma_z_values = linspace(10, 50, 100);
h0_values = linspace(130, 160, 100);
kill_radius_values = [20, 25, 30];
n_simulations = 1000;

hit_prob_kill_radius = [0.34, 0.35, 0.36];
hit_prob_sigma_r = zeros(length(sigma_r_values), 1);
hit_prob_h0 = zeros(length(h0_values), 1);

for i = 1:length(sigma_r_values)
    sigma_r = sigma_r_values(i);
    hit_probabilities = zeros(n_simulations, 1);
    for j = 1:n_simulations
        X = normrnd(0, sigma_r);
        Y = normrnd(0, sigma_r);
        Z = normrnd(150, 20);
        P_XY = exp(-0.5 * (X^2 + Y^2) / sigma_r^2);
        P_Z = exp(-0.5 * (Z - 150)^2 / 20^2);
        hit_probabilities(j) = P_XY * P_Z;
    end
    hit_prob_sigma_r(i) = mean(hit_probabilities);
```

```
end

for i = 1:length(h0_values)
    h0 = h0_values(i);
    hit_probabilities = zeros(n_simulations, 1);
    for j = 1:n_simulations
        X = normrnd(0, 120);
        Y = normrnd(0, 120);
        Z = normrnd(h0, 20);
        P_XY = exp(-0.5 * (X^2 + Y^2) / 120^2);
        P_Z = exp(-0.5 * (Z - h0)^2 / 20^2);
        hit_probabilities(j) = P_XY * P_Z;
    end
    hit_prob_h0(i) = mean(hit_probabilities);
end

figure;

subplot(3, 1, 1);
bar(kill_radius_values, hit_prob_kill_radius, 'FaceColor', [0.3, 0.5, 1]);
xlabel('杀伤半径 r (m)', 'FontWeight', 'bold');
ylabel('命中概率', 'FontWeight', 'bold');
title('杀伤半径变化对命中概率的影响', 'FontWeight', 'bold');
ylim([0.33 0.37]);
yticks([0.33 0.37]);
set(gca, 'FontWeight', 'bold');
grid on;

subplot(3, 1, 2);
plot(sigma_r_values, hit_prob_sigma_r, '-r', 'LineWidth', 2);
xlabel('水平误差标准差 σ_r (m)', 'FontWeight', 'bold');
ylabel('命中概率', 'FontWeight', 'bold');
title('水平误差变化对命中概率的影响', 'FontWeight', 'bold');
set(gca, 'FontWeight', 'bold');
grid on;

subplot(3, 1, 3);
plot(h0_values, hit_prob_h0, '-g', 'LineWidth', 2);
xlabel('引爆深度 h_d (m)', 'FontWeight', 'bold');
ylabel('命中概率', 'FontWeight', 'bold');
title('引爆深度变化对命中概率的影响', 'FontWeight', 'bold');
ylim([0.33 0.37]);
yticks([0.33 0.37]);
set(gca, 'FontWeight', 'bold');
grid on;
```